

准则方程形式的探讨

北京航空航天大学 王 丰** 韩振兴 邢玉明

一、问题的提出

描述低速不可压、常特性的流体绕流等温平壁层流换热时的微分方程组为:

$$\alpha = - \frac{\lambda}{\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_w \quad (1)$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} = a \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

边界条件为: $y = 0, u = v = 0, t = t_w$; $y \rightarrow \infty, u = u_\infty, t = t_\infty$ 。

通过相似变换, 偏微分方程组中 (2) ~ (4) 可转变为两个无量纲的常微分方程, 即:

$$f''' + (1/2)ff'' = 0 \quad (5)$$

$$\theta'' + (1/2)Prf\theta' = 0 \quad (6)$$

相应的边界条件变为: $\eta = 0, f = f' = 0, \theta = 0$; $\eta \rightarrow \infty, f' = 1, \theta = 1$ 。

以上诸式中 u_∞ 、 t_∞ 为来流的速度和温度, t_w 为壁温, $f = f(\eta) = \psi / u_\infty x$ 为无量纲流函数。 $\theta = (t - t_w) / (t_\infty - t_w)$ 为无量纲温度, $\eta = y \sqrt{u_\infty / \nu x}$ 。

数学家 E. 普尔豪森在 $Pr = 0.6 \sim 15$ 时, 用数值积分方法求解能量方程 (6), 并将计算结果整理成下列准则方程:

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{0.5} Pr^{0.3} \quad (7)$$

利用此式计算低普朗数 (特别是液态金属) 流体与壁面之间的换热时, 会产生很大的误差。为什么会出现这种情况呢? 本文拟从理论上来回答这个问题。下面我们先来给出微分方程 (6) 在两种极限情况下的解。

1. 对于 Pr 数很大的液体, 速度附面层的厚度远大于温度附面层的厚度, 这时速度分布可近似的取为直线。即 $f' = 0.332\eta$ 或 $f(\eta) = 0.166\eta^2$ 。将上列速度分布代入方程式 (6) 积分后得 $Pr \rightarrow \infty$ 时热附面层内的温度分布为:

$$\theta = \left\{ \int_{\exp} \left[(0.332/12) Pr \eta^3 \right] d\eta \right\} \left\{ \int_{\exp} \left[(0.332/12) Pr \eta^3 \right] d\eta \right\}$$

由于 $Nu_x = \alpha x / \lambda = Re_x^{1/2} \theta'(0)$, $\theta(0) = 1 / \left\{ \int_{\exp} \left[(0.332/12) Pr \eta^3 \right] d\eta \right\} = 0.339 Pr^{1/3}$ 。所

以,最后得适用于高 Pr 数流体换热的准则方程为:

$$Nu_x = 0.339 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (8)$$

2. 对于液态金属这类流体 $\delta \gg \delta_t$, 这时可以足够近似地把热附面层内流体的速度取为定值, 即 $f' = u/u_\infty = 1$ 。将上式代入方程 (6) 得 $Pr \rightarrow 0$ 时热附面层内的无量纲温度分布

$$\theta = \left\{ \int_{\exp} [(-Pr/4)\eta^2] d\eta \right\} / \left\{ \int_{\exp} [(-Pr/4)\eta^2] d\eta \right\}$$

由于 $Nu_x = \alpha/\lambda = Re_x^{1/2} \theta'(0)$, $\theta'(0) = 1/\left\{ \int_{\exp} [(-Pr/4)\eta^2] d\eta \right\} = (1/\sqrt{\pi}) \cdot Pr^{1/2}$ 。所以, 对于低普朗数流体换热准则方程为:

$$Nu_x = 0.564 Re_x^{1/2} Pr^{1/2} \quad (9)$$

比较方程 (8) 和 (9) 可以看出: 当 $Pr \rightarrow \infty$ 时, $C = 0.339$, $m = 1/3$, 而当 $Pr \rightarrow 0$ 时, $C = 0.564$, $m = 1/2$ 。这就是说, 从理论上来看准则方程中的常数 C 和 Pr 数的指数 m 并非常数, 而是随 Pr 数的变化而改变。

相似理论告诉我们, 准则 Nu 、 Pr 和 Re 之间存在着函数关系, 但由于动量方程是非线性的, 无法求得它的解析解。因此只有用近似拟合的方法或实验方法来建立上述准则之间的具体函数形式。显然, $Nu = C Re^n Pr^m$ 这种形式的准则方程具有经验性质。它只是当 Pr 数变化范围较小时, 可以较准确地反映换热规律, 而当 Pr 数变化范围很大时, 这种简单形式的准则方程不能准确的描述换热规律。

二、 $Pr = 0.001 \sim 7500$ 时积分方程的解

应用积分方程求解换热问题, 不仅数学运算较简单而且计算结果具有很好的直观性, 容易看出理论解的物理意义, 其计算结果使人们一目了然。下面我们利用积分方程, 在第一类边界条件求解 $Pr = 0.001 \sim 7500$ 的流体绕流平壁层流换热问题。

1. $Pr > 1$ 时

这时积分方程的形式为:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x u(t_\infty - t) dy = a \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \omega$$

现假定附面层内流体的流速 u 与速度附面层厚度之间的关系为:

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} \left[\frac{y}{\delta} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{y}{\delta} \right]^3 \quad (A)$$

热附面层内任一点的温度 t 与热附面层的厚度 δ_t 之间的关系为:

$$\theta = \frac{t - t_w}{t_\infty - t_w} = \frac{3}{2} \left[\frac{y}{\delta_t} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{y}{\delta_t} \right]^3 \quad (B)$$

将 (A)、(B) 两式代入积分方程积分并经过整理得 Pr 数与 δ/δ_t 之间的函数关系为:

$$Pr = \frac{0.929(\delta/\delta_t)^3}{1 - (1/14)(\delta/\delta_t)^2} \quad (10)$$

2. $Pr < 1$ 时

积分方程的形式为:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^x (1 - \theta) \frac{u}{u_\infty} dy + \int_0^x (1 - \theta) dy \right] = \frac{a}{u_\infty} \theta'(0)$$

将 (A)、(B) 两式代入上列积分方程进行积分, 经整理得 Pr 数与 δ/δ_t 之间的函数关系

$$Pr = \frac{0.37143(\delta/\delta_t)^2}{1 - (\delta/\delta_t) + (2/5)(\delta/\delta_t)^2 - (1/35)(\delta/\delta_t)^4} \quad (11)$$

表 1 为根据式 (10)、(11) 计算的不同 Pr 数时, 速度附面层与热附面层厚度之比 δ/δ_t 与 Pr 数的对应值。

表 1 不同 Pr 数时对应的 δ/δ_t 的值

Pr	7433.3	4302.0	2709.4	1815.3	1275.1	929.7	116.5	34.6	14.7	7.57
δ/δ_t	20.0	16.6	14.286	12.5	11.1	10.0	5.0	3.3	2.5	2.0
Pr	4.41	2.81	1.90	1.35	1.0005	0.742	0.535	0.372	0.247	0.155
δ/δ_t	1.6	1.43	1.25	1.1	1.0	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
Pr	0.0896	0.0454	0.0182	0.0041	0.0033	0.0029	0.00195	0.00098		
δ/δ_t	0.40	0.30	0.20	0.160	0.090	0.085	0.070	0.0992		

公式 (10)、(11) 具有连续性。当 $\delta/\delta_t=1$ 时, 两式相对应的 Pr 数均为 1。根据换热微分方程可得下列结果。

$$\alpha_x = - \frac{\lambda}{(t_\infty - t_w)} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_w = \frac{\lambda}{\delta_t(x)} \left(\frac{\partial \eta_t}{\partial \eta} \right)_w = \frac{\lambda}{\delta_t} \theta'(0)$$

或

$$Nu_x = \frac{dx}{\lambda} = \frac{x}{\delta_t(x)} \theta'(0) = \frac{x}{\delta_t(x)} \frac{\delta(x)}{\delta_t(x)} \theta'(0) \tag{12}$$

上式中 $\theta'(0)$ 为壁面上的温度梯度。

根据上面给出的 u 和 δ 以及 t 和 δ_t 之间的关系式求得

$$x/\delta(x) = (1/4.64) Re_x^{1/2} \qquad \theta'(0) = 1.5$$

将以上结果代入式 (12) 得

$$Nu_x = 0.323 Re_x^{1/2} [\delta(x)/\delta_t(x)] = 0.323 Re_x^{1/2} f(Pr) \tag{13}$$

为了回答本文 (一) 节所提出的问题, 我们先求出式 (10)、(11) 中 Pr 与 δ/δ_t 之间的两个特殊关系。

当 $Pr \gg 1$ 时, 由式 (10) 得 $\delta/\delta_t=1.0249 Pr^{1/3}$, 这时准则方程 (13) 简化为

$$Nu_x = 0.331 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \tag{14}$$

当 $Pr \ll 1$ 时, 由式 (11) 得 $\delta/\delta_t=1.6408 Pr^{1/2}$, 这时准则方程 (13) 简化为

$$Nu_x = 0.53 Re_x^{1/2} Pr^{1/2} \tag{15}$$

将由积分方程所导出的准则方程 (14)、(15) 和由偏微分方程组解出的两个极限解 (8)、(9) 进行对比, 我们可以得出相同的结论: 当 Pr 数变化的范围非常宽广时, 准则方程中的系数 C 和指数 m 并非常数。

如果将表 1 中 Pr 数和 (δ/δ_t) 的对应关系, 描绘在对数坐标纸上就可看出该线为一曲线而并非直线, 这就证明了 δ/δ_t 与 Pr 之间的函数关系 8 不能用简单的指数函数 $C Pr^m$ 的形式来描述。当 Pr 数的值很小时, 曲线的切线斜率为 1/2, 而当 Pr 数的值很大时, 曲线的切线斜率变为 1/3。

上表中 Pr 和 δ/δ_t 之间的关系, 可以相当精确的由下列函数来描述。即

$$\frac{\delta(x)}{\delta_t(x)} = f(Pr) = 1.0495 \left[\frac{Pr}{1 + (0.021/Pr)^{0.7}} \right]^{1/3}$$

将上式代入方程 (13), 最后得 $Pr=0.001\sim7500$ 的流体, 绕流等温平壁换热的准则方程为:

$$Nu_x = 0.339 \left[\frac{Pr}{1 + (0.021/Pr)^{0.7}} \right]^{1/3} Re_x^{1/2} \tag{16}$$

为了检验式 (16) 的精确性, 我们将本文推荐的准则方程与文献 [3] 中按精确解求得的结果进行了对比, 表 2 为两者的对比计算结果。

表 2 精确解 (数值积分) 与按方程 (16) 计算值的比较

Pr	0.003	0.005	0.01	0.1	0.5	0.7	1.0	3.0
文献 [3] 数据	0.0278	0.0385	0.052	0.133	0.259	0.293	0.332	0.478
(16) 式计算值	0.0288	0.0374	0.0526	0.143	0.260	0.293	0.332	0.484
Pr	7.0	10.0	15.0	50.0	100	500	1000	3000
文献 [3] 数据	0.645	0.730	0.835	1.250	1.4570	2.66	3.27	4.80
(16) 式计算值	0.645	0.727	0.833	1.247	1.572	2.69	3.39	4.89

不难看出公式 (16) 相当精确地综合了 $Pr=0.001\sim3000$ (实际可到 7500) 的计算结果。

三、结 论

1. 本文用对流换热微分方程组的两个极限解和积分方程的两个极限解, 从理论上证明了目前国内外广泛使用的准则方程 $Nu=C Re^m Pr^n$ 的系数 C 和指数 m 并非常数, 它们均随 Pr 数的变化而改变。只是当 Pr 数变化范围不很大时, 这种形式的准则方程才能校好的综合理论计算结果或实验数据。

2. 本文利用积分方程在第一类边界条件下求解了 $Pr=0.001\sim7500$ 时的各种流体绕流平壁层流换热问题, 作者推荐的准则方程 (16) 相当精确地综合了理论计算结果。

3. 准则方程中 C 和 m 的值不为常数的结论; 对于强迫对流中的紊流换热, 以及自然对流层流和紊流换热都是正确的。有的文献和教材中, 将 Pr 数变化范围很大的计算或实验结果分为三个区域, 并分别用三个准则方程来描述, 为流体沿明显竖壁作层流自然对流换热的准则方程:

$$\begin{aligned} Nu_x &= 0.600(G_{rx} Pr^2)^{1/4} & Pr &\rightarrow 0 \\ Nu_x &= 0.411(G_{rx} Pr)^{1/4} & 0.1 < Pr < 10 \\ Nu_x &= 0.503(G_{rx} Pr)^{1/4} & Pr &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

显然这种处理方法也不能精确的反映 Pr 数和 Nu_x 数之间的函数关系。

参 考 文 献

[1]

W. M. Kays and M. E. Crawford-, "Convective Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill Book Company, 1980.

[2]

Новиков И. И., Воскресенский К. Д., "Основы Ядерной Энергетики", Госатомиздат, 1961.

[3]

Кутателадзе С. С., "Основы Теории Теплообмена", Атомиздат, 1979.

[4]

杰姆斯、苏赛克, "传热学", 人民教育出版社, 1982 年.

[5]

王丰, "相似理论及其在传热学中的应用", 高等教育出版社, 1990 年.

conclusions can be obtained: The local and total deflection of the blade are directly proportional to momentum transfer to the blade. The load-duration affects directly the deformation and stress states of the blade too. So the two parameters must be accurately predicted when a load model is developed. It is also very important to correctly predict the load location on the blade because the eccentric loads cause the greater deflection and twisting. The spatial distribution forms for distributed loads seem to have a little effect on blade response. The work which is conducted in this paper can provide the basis for the development of the bird impact load model.

STRATEGIES FOR OPTIMAL DESIGN OF GAS TURBINE DISKS

Zhang Dongxu, Cheng Gengdong, Sui Yongkong, Shong Limin

(*Dalian University of Technology*)

Liu Xiangsheng and Chen Junyue

(*Shenyang Aeroengine Research Institute*)

ABSTRACT

A number of strategies for optimal design of the gas turbine disks are proposed, which include separation of tenons design from disk design, rational simplification of structural model, check on local constraints, optimal design based on elastic analysis and further check based on elastoplastic analysis, multi-level optimization by grouping design variables. According to the strategies a computer program TDSOS is developed for practical use. By applying the strategies and the program TDSOS, shape optimization of gas turbine disk with light mass and low stress level can be obtained and the contradiction among high performance index, reliability and long life expectation is better solved.

A NEW FORM OF NUSSELT'S DIMENSIONLESS EQUATION

Wang Feng, Hang Zhenxing, Xing Yuming

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

It is expounded theoretically that C and m of the dimensionless equation $Nu = C Re^m Pr^n$, which is in common use, should not be constant. This simple dimensionless equation is unable to reflect accurately the heat transfer when Prandtl number equals $0.001 \sim 7500$. The authors made use of integral equations to solve the laminar flow heat transfer problem of various field flow fields around a plate of Prandtl number 0.001 to 7500 . Another form of dimensionless equation is recommended which can describe the functional relationship among Nusselt number, Raynolds number and Prandtl number more accurately.

STUDY ON SECONDARY ATOMIZATION OF LIQUID FUEL AT THE LIP OF THE FLAMEHOLDER

Yang Maolin, Huang Yong, Gu Shanjiang, Zhang Yingnian

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

An experimental investigation of secondary atomization of liquid fuel at the lip of the flameholder has been completed by means of Malvern Particle-Sizer. This secondary atomization has several features: Fine droplets occur in the high speed air flow side, while gross droplets occur in the recirculation zone side; the velocity of air flow (V_a) has a predominant influence on the mean drop size (MMD) of the spray, the effect may